* میانگین

مشهورترین ومعتبرترین، پرکاربردترین، کاراترین و باثبات‌ترین شاخص گرایش مرکزی می‌باشد.

* میانگین حسابی[1]

ساده ترین و در بسیاری موارد مهمترین معیار تمایل به مرکز میانگین حسابی است و آن عبارت است از مجموع داده ها تقسیم بر تعداد آنها. کمیتی است که مقدار متوسط یا مرکز ثقل داده‌های به دست آمده را نشان می‌دهد.

مثال : فرض کنید سن های ۶ کودک شرکت کننده در برنامه مراقبت بهداشتی به شکل زیر می باشد. میانگین سنی آنها را محاسبه کنید ؟ ۴ ، ۲ ، ۳ ، ۲ ، ۲ ، ۱

$$\text{میانگین سنی} = \frac{۱+۲+۲+۳+۲+۴}{۶} = \frac{۱۴}{۶} = ۲/۳$$

عیب بزرگ میانگین حسابی این است که متأثر از تک تک داده هاست و در صورتیکه داده های پرت و یا به اصطلاح اثرگذار در داده باشد به شدت بر میانگین حسابی اثر می گذارد و بنابراین نمی تواند معیار خوبی برای مرکزیت داده باشد.

مثال : در مثال قبل فرض کنید که سن یک کودک به جای مثلاً ۲ سال ۱۱ سال باشد مشاهده می کنید که این یک عدد چه تأثیری بر میانگین می گذارد. این داده را به اصطلاح اثرگذار می گویند.

$$\text{میانگین سنی} = \frac{۱+۲+۲+۳+۱۱+۴}{۶} = \frac{۲۳}{۶} \cong ۴$$

در صورتی که پژوهشگر علاقمند باشد تا نمره‌های خیلی بزرگ وخیلی کوچک بر شاخص مرکزی تاثیر داشته باشند، میانگین شاخص خوبی است.

✓ محاسبه میانگین وقتی داده‌ها منظم نشده اند. (محاسبه میانگین در داده‌های بدون فراوانی)

برای محاسبه معدّل یا میانگین داده‌های خام بدون فراوانی ابتدا تک تک آنها را با یکدیگر جمع و سپس بر تعداد آنها تقسیم می‌نماییم که فرمول آن بشرح زیر است :

۱۱ و ۷ و ۲۴ و ۲۳ و ۹ و ۸ $\qquad \bar{X} = \frac{\sum X}{N}$

$$\bar{X} = \frac{8+9+23+24+7+11}{6} = \frac{100}{6} = 16\ /\ 6$$

---

[1]- Arithmetic Average

✓ **محاسبه میانگین وقتی داده‌ها منظم شده اند. (محاسبه میانگین در داده‌های با فراوانی)**

۱- اعدادرا به صورت صعودی یا نزولی در یک ستون زیر هم می نویسم.

۲- محاسبه تعداد فراوانی

۳- ضرب هر عدد در فراوانی

۴- محاسبه میانگین از طریق فرمول

مثال: میانگین داده‌های زیر را حساب کنید. ۱۲-۱۰-۱۲-۸-۷- ۶-۲-۵-۲-۴-۵

x	f	xf
۱۲	۲	۲۴
۱۰	۱	۱۰
۸	۱	۸
۷	۱	۷
۶	۱	۶
۵	۲	۱۰
۴	۱	۴
۲	۲	۴
	۱۲	۷۳

$$\bar{X} = \frac{\sum FX}{N} = \frac{73}{12} = 6 / 1$$

تمرین: میانگین داده‌های زیر را حساب کنید.

x	f
۲	۶
۳	۴
۴	۸
۵	۶
	$\sum f = 24$

✓ محاسبه میانگین با روش مستقیم یا با نمره‌های اصلی

مثال: جدول زیر توزیع فراوانی نمره‌های ۲۰ ورزشکار را در یک آزمون مهارت ورزشی نشان می‌دهد. میانگین را از روش مستقیم (اصلی) محاسبه کنید.

حدود طبقات	فراوانی	نماینده طبقات	فراوانی در حد میانی
۳-۱	۵	۲	۱۰
۶-۴	۴	۵	۲۰
۹-۷	۶	۸	۴۸
۱۲-۱۰	۳	۱۱	۳۳
۱۵-۱۳	۲	۱۴	۲۸
	۲۰		۱۳۹

$$\bar{X} = \frac{\sum fix_c}{N} = \frac{139}{20} = 6/95$$

وقتی داده‌ها طبقه بندی شده باشند از دو روش می توانیم میانگین را محاسبه کنیم: ۱- با استفاده از مجموع فراوانی ضرب در اعداد میانی ۲- با استفاده از میانگین فرضی

مراحل لازم برای محاسبه میانگین نمره‌هایی که به صورت جدول توزیع فراوانی تنظیم می‌شوند و دارای فاصله طبقاتی بزرگتر از یک هستند.

تمرین منزل: در جدول زیر، سن ازدواج ۱۰۰ نفر در آن طبقه بندی شده است. میانگین سن این افراد را حساب کنید.

سن به سال	f	x´
۶۴-۶۰	۴	۶۲
۵۹-۵۵	۹	۵۷
۵۴-۵۰	۱۱	۵۲
۴۹-۴۵	۱۸	۴۷
۴۴-۴۰	۲۱	۴۲
۳۹-۳۵	۱۶	۳۷
۳۴-۳۰	۱۰	۳۲
۲۹-۲۵	۶	۲۷
۲۴-۲۰	۳	۲۲
۱۹-۱۵	۲	۱۷

محاسبه میانگین از راه میانگین فرضی[۲] (راه کوتاه)یا روش غیر مستقیم یا رمز گردانی شده[۳]

اگر مقادیر و اعداد به دست آمده از اندازه‌گیری‌های مختلف بزرگ باشد یا حد میانی طبقات، عدد اعشاری باشد و ماشین حساب در اختیار نباشد، محاسبه میانگین از طریق روش مستقیم یا با نمره‌های اصلی پیچیده، وقت گیر، مشکل و خسته کننده می‌شود. در چنین حالتی، از روش دیگری که آن را روش غیرمستقیم یا با نمره‌های فرضی (حدسی) یا رمز گردانی شده می نامند، میانگین را محاسبه می کنیم.

در این روش فاصله طبقات باید مساوی باشد.

M´ : میانگین فرضی یا نماینده طبقه مبنا یا طبقه‌ای که فرض می شود میانگین در آن قرار دارد.

عامل تصحیح + میانگین فرضی= میانگین واقعی x´

$$\bar{X} = \acute{M} + Xc$$

۲- **Guessed**
۳- **Coding**

۱- انتخاب طبقه‌ای که فرض می‌شود میانگین در آن قرار دارد. اول حد میانی طبقات باید محاسبه شود. (معمولاً باید وسط باشد و دارای بزرگترین فراوانی باشد). این کار به خاطر سهولت در محاسبات است زیرا هر طبقه‌ای که انتخاب شود در مقدار میانگین تاثیر ندارد.

۲- ستونی با عنوان $\tilde{X}$ (ایکس کلاه دار) را تشکیل داده و در جلوی طبقه‌ای که فرض می‌شود میانگین درآن قرار دارد صفر قرار می‌دهید.

۳- فاصله هر یک از طبقات با طبقه‌ای که فرض می‌شود میانگین درآن قرار دارد را تعیین کنید. به طبقات بالاتر یا بزرگتر از مبنا ارزش ۱+، ۲+، ۳+ و الی آخر یا علامت مثبت و به طبقات پایین تر یا کوچکتر از مبنا به ترتیب ارزش ۱-، ۲-، ۳- و الی آخر یا علامت منفی اضافه کنید.

۴- ستون $\tilde{X}$ F را تشکیل می‌دهیم.

۵- ستون $\mathbf{F\tilde{X}}$ را جمع جبری می‌کنیم {اعداد مثبت را با هم و اعداد منفی را با هم جمع و آنها را از هم کم می‌کنیم و باقی مانده را با علامت عددی که قدر مطلق بیشتری دارد، می‌نویسم. این عدد مجموع انحرافات تمامی اعداد جدول از میانگین فرضی را نشان می‌دهد.

۶- محاسبه از راه فرمول

$$\bar{X} = M + \frac{\sum F\tilde{\boldsymbol{X}}}{N}(i)$$

M: میانگین فرضی (نقطه میانی طبقه‌ای که فرض می‌شود میانگین در آن قرار دارد).

مثال: در جدول زیر میانگین را از راه فرضی یا کوتاه محاسبه کنید.

طبقات	F	M	$\tilde{X}$	$F\tilde{X}$
۴۲–۴۴	۳	۴۳	+۴	۱۲
۳۹–۴۱	۱۱	۴۰	+۳	۳۳
۳۶–۳۸	۸	۳۷	+۲	۱۶
۳۳–۳۵	۲۳	۳۴	+۱	۲۳
۳۰–۳۲	۳۵	۳۱	۰	۳۵
۲۷–۲۹	۱۴	۲۸	−۱	−۱۴
۲۴–۲۶	۱۰	۲۵	−۲	−۲۰
۲۱–۲۳	۹	۲۲	−۳	−۲۷
۱۸–۲۰	۶	۱۹	−۴	−۲۴
۱۵–۱۷	۱	۱۶	−۵	−۵

جمع	N=120			$\sum F\tilde{\boldsymbol{X}} = -\mathbf{6}$

$$\bar{X} = M + \frac{\sum F\tilde{\boldsymbol{X}}}{N}(i)$$
$$= ۳۱ + \frac{-۶}{۱۲۰}(۳) = ۳۰/۸۵$$

تمرین منزل: :برای داده‌های جدول زیر از راه کوتاه میانگین را به دست آورید.

فراوانی	طبقات
۹	۶–۸
۸	۹–۱۱
۱۰	۱۲–۱۴
۷	۱۵–۱۷
۹	۱۸–۲۰
۷	۲۱–۲۳

مثال تمرین:جدول زیر توزیع فراوانی نمره‌های ۲۸دانشجو را در یک آزمون همنوایی نشان می‌دهد. میانگین را از روش غیر مستقیم (فرضی)حساب کنید.

cl	Fi	x´		f
۱۴–۱۰		۱۲	-۲	-۶
۱۹–۱۵	۶	۱۷	-۱	-۶
۲۴–۲۰	۸	۲۲	۰	۰
۲۹–۲۵	۵	۲۷	+۱	+۵
۳۴–۳۰		۳۲	+۲	+۸
۳۹–۳۵	۲	۳۷	+۳	+۶

✓ میانگین وزنی[4]

میانگین ساده یا حسابی زمانی به کار می‌رود که مشاهدات (داده‌های آماری) دارای اهمیت مساوی باشند. حال اگر این داده‌ها دارای اهمیت یکسان نباشند لازم است برای مشاهدات درجه اعتبار یا وزن خاصی قائل شویم. به عنوان مثال هنگامی که قصد داریم معدل یک ترم را به دست آوریم با توجه به اینکه نمرات دروس مختلف دارای ارزش یکسانی نیستند (مقدار واحد) مثلا درس آمار ۴ واحد، زبان انگلیسی ۲ واحد و ... اگر فقط نمرات را با هم جمع و بر مقدار آن‌ها یا تعداد واحدهای ترم تقسیم کنیم میانگینی که به دست می آید صحیح نیست. در این مواقع لازم است ابتدا هر مشاهده را در وزن یا میزان اهمیت آن ضرب و سپس نتایج را جمع و بر مجموع وزن‌ها تقسیم کنیم. برای محاسبه میانگین وزنی از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$\bar{X}_W \frac{\sum XW}{\sum W}$$

که در آن w_i وزن متناسب با مشاهده x_i است.

مثال: میانگین نمرات زیر را به دست آورید.

$\sum XW$	نمره Xi	واحد Wi	درس
۶۶	۱۶/۵	۴	آمار و روش تحقیق
۵۴	۱۸	۳	برنامه‌ریزی
۵۶	۱۴	۴	فنون تدریس
۳۰	۱۵	۲	اقدام پژوهی
۱۹	۱۹	۱	تربیت بدنی
۲۲۵		۱۴	

حل:

$$\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{W}} \frac{\sum \mathbf{XW}}{\sum \mathbf{W}} = \frac{\mathbf{225}}{\mathbf{14}} = \mathbf{16/07}$$

---

[4]-Weighted Mean

- ✓ میانگین میانگین ها، میانگین مرکب یا میانگین کل[۵]

در برخی موارد لازم است میانگین میانگین‌های گروه‌های مختلف را محاسبه کنیم. در چنین حالتی از میانگین کل یا مرکب، که نوعی میانگین حسابی است، استفاده می کنیم. ممکن است تعداد گروه‌ها برابر یا نابرابر باشد.

- ✓ **محاسبه میانگین کل با تعداد nهای برابر (اگر تعداد اعضای هریک از گروه‌ها مساوی باشد یا حجم هر یک از نمونه ها مساوی باشد).**
- ✓ میانگین کل عبارت است از مجموع میانگین‌های گروه‌ها تقسیم بر تعداد گروه‌ها یا میانگین‌ها

$$\bar{X}_T = \frac{\sum\bar{X}}{N}$$

$\bar{X}_T$: میانگین کل

$\sum\bar{X}$: مجموع میانگین‌های گروه‌ها

مثال: اطلاعات زیر در دست است. میانگین کل را محاسبه کنید.

$\bar{X}$	N
۱۴	۶۰
۱۸	۶۰
۱۳	۶۰

$$\bar{X}_T = \frac{\sum\bar{X}}{N} = \frac{14+18+13}{3} = 15$$

تمرین منزل: استاد درس آمار در چهار کلاس که هر کلاس ۲۵دانش آموز دارد، در درس آمار میانگین نمرات هر کلاس را به دست آورده و ثبت کرده است، میانگین کل را به دست آورید.

کلاس	Xi	Ni
A	۱۵	۲۵
B	۱۴,۵	۲۵
C	۱۷	۲۵
D	۱۶,۵	۲۵

۵- Total Mean

✓ محاسبه میانگین کل در صورتی‌که گروه‌ها دارای حجم نامساوی باشد(nهای نابرابر)

میانگین کل عبارت است از مجموع حاصل ضرب میانگین هر گروه در تعداد آن تقسیم بر تعداد گروه‌ها یا میانگین‌ها

$$\bar{X}_T = \frac{\sum\bar{X}ni}{N_T}$$

$\bar{X}_T$: میانگین کل

N_T**:** مجموع کل افراد در نمونه ها یا گروه ها

$\sum\bar{X}ni$: مجموع حاصلضرب میانگین هر گروه در تعداد آن

مثال: اگر میانگین کلاس A با تعداد ۲۵ نفر در درس آمار برابر ۱۷ و تعداد میانگین کلاس B با تعداد ۳۶ نفر در درس پژوهش برابر ۱۸,۵ باشد میانگین کل این دو کلاس را محاسبه کنید.

مجموع حاصل ضرب میانگین هر گروه در تعداد آن	Ni	میانگین کل	کلاس
۴۲۵	۲۵	۱۷	A
۶۶۶	۳۶	۱۸,۵	B
۱۰۹۱	۶۱		

$$\bar{X}_T = \frac{\sum\bar{X}ni}{N_T} = \frac{1091}{61} = 17/88 \cong 17/9$$

تمرین منزل: دانشجویی در آزمون پایانی در دروس ریاضی، فیزیک وآمار به ترتیب نمرات ۱۴ و ۱۷ و ۱۶ کسب کرده است. اگر تعداد واحد هر یک از دروس به ترتیب ۳، ۲ و ۳ باشد، میانگین نمرات این دانشجو چند است؟

✓ میانگین هندسی[۶]: ریشهnام حاصل‌ضرب اعداد یا داده‌ها

(ریشه سوم عددA و آن عددی است که وقتی به توان ۳برسد مساوی Aمی‌شود. یعنی اگر ریشه سوم عددA مساوی b باشد، b^3 مساوی A می‌شود.

۶- Geometric Mean

مثال: درمجموعه داده‌های ۱،۳،۹میانگین هندسی کدام است؟

ریشه سوم ۲۷ می شود ریشه سوم عدد ۳ به توان ۳ که ریشه با توان ساده می شود و حاصل ۳ می شود.

$$\sqrt[۳]{۹ \times ۳ \times ۱} = \sqrt[۳]{۲۷} = \sqrt[۳]{۳^۳} = ۳$$

شیوه محاسبه میانگین هندسی که با نماد G نشان داده می‌شود، به شکل زیر است: **ریشه N ام حاصل ضرب آن‌ها.**

$$G = \sqrt[N]{a_۱ \times a_۲ \times a_۳ \ldots a_n}$$

براساس این فرمول کافی است مراحل زیر طی شود:

۱. همه مقادیر در هم ضرب شوند.
۲. ریشه n ام حاصلضرب محاسبه شود.

به این ترتیب برای محاسبه میانگین هندسی مقادیر ۱،۵،۸،۱۰ بر اساس مراحلی که در بالا گفته شد، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\sqrt[۴]{۱۰ \times ۸ \times ۵ \times ۱} = \sqrt[۴]{۴۰۰} = \sqrt{۲۰} = ۴/۴۷$$

۱۰×۸×۵×۱=

که با گرفتن ریشه چهارم به مقدار ۴,۴۷ خواهیم رسید. در حالیکه میانگین حسابی برای این اعداد برابر با ۶ خواهد بود.

نکته: میانگین هندسی فقط برای اعداد مثبت قابل محاسبه است.

✓ میانگین همساز(هامونیک)[۷]

میانگین همساز عکس میانگین هندسی است. کاربرد میانگین همساز در موارد زیر می باشد: هنگامی که مقیاس داده‌ها یک مقیاس ترکیبی باشد مانند کیلومتر برساعت؛ متر بر ثانیه؛ دور در ثانیه؛ وقتی نمره‌ها مثبت و واقعی باشند؛ وقتی که داده‌ها برابر۲داده (عدد)باشند. در بسیاری از موقعیت‌ها میانگین همساز، میانگین دقیق تری نسبت به سایر میانگین ها است.

میانگین همساز کمتر در مسائل پژوهشی به کار برده می‌شود.

$$H = \frac{۱}{\frac{۱}{N}(\frac{۱}{x1} + \frac{۱}{x2} + \frac{۱}{x3} + \cdots + \frac{۱}{xn})}$$

برای مثال قبلی

$$H = \frac{۱}{\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۱})} = \frac{۱}{\frac{۱۳}{۲۷}} = \frac{۲۷}{۱۳} = ۲/۰۷$$

مثال: در یک کارگاه تراشکاری یک قطعه خاص به وسیله سه رایانه در زمان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ ساعت تراش داده می‌شود. میانگین هارمونیک را محاسبه کنید.

$$H = \frac{۳}{(۴ + ۳ + ۲)} = \frac{۱}{۳}$$

تمرین: اگر در یک مسافرت نصف مسیر را با سرعت ۶۰ کیلومتر بر ساعت طی کنید و بقیه مسیر را ۴۰ کیلومتر بر ساعت طی کنید به وسیله میانگین همساز سرعت را حساب کنید؟

برای بر آورد میانگین همساز از روی میانگین های هندسی وحسابی=MH سوال۲۶ کتاب امین پور

برای بر آورد میانگین هندسی از روی میانگین ها HM و حسابی =G سوال۲۷ کتاب امین پور.

رابطه بین میانگین‌ها:

مثال: در مجموعه داده‌های ۸،۴،۲ میانگین حسابی، هندسی و هارمونیک را محاسبه و با یکدیگر مقایسه کنید؟

میانگین حسابی بزرگتر یا مساوی با میانگین هندسی بزرگتر یا مساوی با میانگین هارمونیک

---

[۷]- Harmonic Mean

$$\bar{X} > G > HM$$

ویژگی‌های میانگین:

۱- در داده‌هایی که مقیاس فاصله‌ای یا نسبتی است، میانگین کاربرد دارد.

۲- به تک تک داده‌های توزیع فراوانی حساس است تحت تاثیر بالاترین و پایین ترین اعداد قرار می گیرد.

۳- همیشه $\sum(X-\bar{X})=۰$ (مجموع انحرافات تمام اعداد یا نمره‌ها از میانگین حسابی در یک مجموعه برابر با صفر است.

X	X−$\bar{X}$
۱	−۲
۲	−۱
۳	۰
۴	+۱
۵	+۲

۴- دارای ثبات بیشتری نسبت به مُد و میانه است.

۵- میانگین همیشه به سمت اعداد بزرگ یا کوچک کشیده می‌شود.

۶- مجموع مجذورات انحراف نمره‌ها یا اعداد از میانگین حسابی همیشه کوچکتر یا مساوی با مجموع مجذورات انحراف نمره‌ها از هر عدد دیگری است.

$$\Sigma(X-\bar{X})^۲ \leq (X-A)^۲$$

$(X-13)^2$	$(X-\bar{X})^2$	X
۸۱	۴۹	۷
۳۶	۱۶	۹
۱۶	۴	۱۱
		۱۳
۰	۴	۲۲
۸۱	۱۲۱	
۲۱۲۸	۱۹۴	۶۲

۷- اگر تمام داده‌ها باعدد ثابت C جمع یا تفریق، ضرب یا تقسیم شوند میانگین هم با این عدد جمع یا تفریق، ضرب یا تقسیم می‌شود. کامل‌ترین و بهترین آماره می‌باشد. به هیچ وجه تحت تاثیر داده‌ها قرار نمی‌گیرد. بیشتر با کمیّات سروکار دارد.

رابطه اندازه‌های گرایش مرکزی در منحنی و موارد کاربرد آن‌ها:

در توزیع بهنجار یا نرمال: میانگین حسابی = میانه = نما

$$\bar{X} = Mn = Mo$$

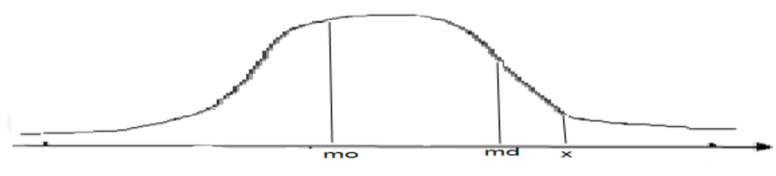
در کجی مثبت: میانگین حسابی > میانه > نما

$$\bar{X} > Mn > Mo$$

در کجی منفی: میانگین حسابی < میانه < نما

$$\bar{X} < Mn < Mo$$

نمره‌های انتهایی بر میانگین بیشترین تاثیر، بر میانه تاثیر کم و بر نما کمترین تاثیر را می‌گذارد.



تمرین منزل: برای جدول توزیع فراوانی گروهی زیر، نما، میانه و میانگین را محاسبه کنید و کجی را تعیین کنید؟

X1	fi	x`	fix`	cf
۳۰-۳۴	۲	۳۲	۶۴	۲۰

۲۵–۲۹	۳	۲۷	۸۱	۱۸
۲۰–۲۴	۴	۲۲	۸۸	۱۵
۱۵–۱۹	۲	۱۷	۳۴	۱۱
۱۰–۱۴	۵	۱۲	۶۰	۹
۵–۹	۴	۷	۲۸	۴
	۲۰		۳۵۵	